



# Chap2 Basic Structures

## Part I: Sets and Functions

Jin-Hui Wu

2026-03-13

# 大纲

---

□ 集合

□ 函数

□ 序列

□ 集合的势

□ 矩阵

# 大纲

---

## □ 集合 (2.1-2.2)

- 集合的描述

- 集合的关系

- 集合的运算

- 集合恒等式

## □ 函数

# 集合的基本概念

---

## □ 集合 (set)

- 集合是一些无序对象形成的总体
  - 本班的所有学生
  - 本房间的所有椅子

# 集合的基本概念

---

## □ 集合 (set)

- 集合是一些无序对象形成的总体
  - 本班的所有学生
  - 本房间的所有椅子

## □ 元素 (element)

- 集合中的对象称为元素
- $a \in A$  表示  $a$  是  $A$  的元素，称作  $a$  属于  $A$
- $a \notin A$  表示  $a$  不是  $A$  的元素，称作  $a$  不属于  $A$

# 集合的描述

---

## □ 列举法

□ 把集合的所有元素逐一枚举

□ 也称为Roster method

□ 如  $S = \{a,b,c,d\}$

□ 顺序不重要，是否重复不重要

□  $S = \{a,b,c,d\} = \{d,c,b,a\} = \{a,b,c,d,d\}$

# 例

---

□ Set of all vowels (元音) in the English alphabet:

□  $V = \{a, e, i, o, u\}$

□ Set of all odd positive integers less than 10:

□  $O = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

□ 无法列举所有正奇数

□ 列举法只适合小规模有限集

# 集合的描述

---

## □ 描述法

□ 指定集合元素需满足的性质

□ 也称 Set-Builder Notation

□  $S = \{x \mid x \text{ is a positive integer less than } 100\}$

□ 本质是用谓词逻辑定义集合

$\{x \mid P(x) \wedge I(x) \wedge L(x, 100)\}$

# 例：一些重要的集合

---

- $\mathbb{N} = \{x \mid x \text{ is a natural number}\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ 
  - 当规律明显时，可以用省略号来枚举，但并不严谨
- $\mathbb{Z} = \{x \mid x \text{ is an integer}\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z}^+ = \{x \mid x \text{ is a positive integer}\} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ is a real number}\}$
- $\mathbb{C} = \{x \mid x \text{ is a complex number}\}$
- $\mathbb{Q} = \{x \mid x \text{ is a rational number}\}$

# 例：一些重要的集合

---

## □ 区间 (**interval**)

□  $[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$

□ 闭区间 (closed interval)

□  $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$

□ 开区间 (open interval)

□  $[a,b) = \{x \mid a \leq x < b\}$

□  $(a,b] = \{x \mid a < x \leq b\}$

# 罗素悖论

---

## □ 罗素 (Bertrand Russell)

- 英国数学家、逻辑学家
- 1950年获诺贝尔文学奖

## □ 罗素悖论 (Russell's **paradox**)

- $S = \{\text{all sets which are not members of themselves}\}$ 
  - $S \in S$ 和 $S \notin S$ 均不成立
- 理发师悖论
  - 理发师只给不给自己理发的人理发

# 拓展：罗素悖论的解决

---

□ 前面介绍的是朴素集合论 (naïve set theory)

□ ZFC公理化集合论

□ 一共有9条公理

□ 分类公理 (axiom schema of specification)

□ 可排除罗素悖论

□ 选择公理 (axiom of choice)

□ 有一系列互不相交的集合，可以从每个集合中选一个构成一个新的集合

□ 导致分球悖论：一个单位球可以分成5份，经过平移旋转后重新组合，可以得到两个单位球

# 大纲

---

## □ 集合 (2.1-2.2)

- 集合的描述

- 集合的关系

- 集合的运算

- 集合恒等式

## □ 函数

# 集合的关系

---

## □ 集合相等 (equal)

□ 两个集合相等，当且仅当它们具有相同的元素

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

□  $\{1,3,5\} = \{3,5,1\} = \{1,3,5,1\}$

# 子集

---

## □ 子集 (subset)

□ 集合A是集合B的子集，当且仅当A的每个元素也是B的一个元素，记作  $A \subseteq B$

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

□  $A=B$  等价于  $A \subseteq B$  且  $B \subseteq A$

# 子集

---

## □ 子集 (subset)

- 集合A是集合B的子集，当且仅当A的每个元素也是B的一个元素，记作 $A \subseteq B$

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

## □ 空集 (empty set)

- 没有元素的集合，记作 $\emptyset$ ，是任何集合的子集
- $\emptyset \neq \{\emptyset\}$

## □ 全集 (universal set)

- 包含所有考虑元素的集合，记作U，任何集合都是U子集

# 真子集

---

## □ 真子集 (proper subset)

□ 若  $A \subseteq B$  且  $A \neq B$ , 则  $A$  为  $B$  的真子集, 记作  $A \subset B$

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$$

# 集合等势

---

## □ 集合的基数 (**cardinality**)

□ 若集合 $S$ 中不同元素的个数有限 (finite), 则其不同元素的个数称为 $S$ 的基数, 记作 $|A|$

## □ 例

□  $|\emptyset| = 0$ ,  $|\{\emptyset\}| = 1$

□  $|\{1,2,3\}| = 3$ ,  $|\mathbb{N}|$ 为无穷

# 集合等势

---

## □ 集合的基数 (cardinality)

□ 若集合 $S$ 中不同元素的个数有限 (finite), 则其不同元素的个数称为 $S$ 的基数, 记作 $|A|$

### □ 例

□  $|\emptyset| = 0$ ,  $|\{\emptyset\}| = 1$

□  $|\{1,2,3\}| = 3$ ,  $|\mathbb{N}|$ 为无穷

## □ 集合等势 (equipotent)

□ 若两个集合基数相等, 则称它们等势

# 大纲

---

## □ 集合 (2.1-2.2)

- 集合的描述
- 集合的关系
- 集合的运算
- 集合恒等式

## □ 函数

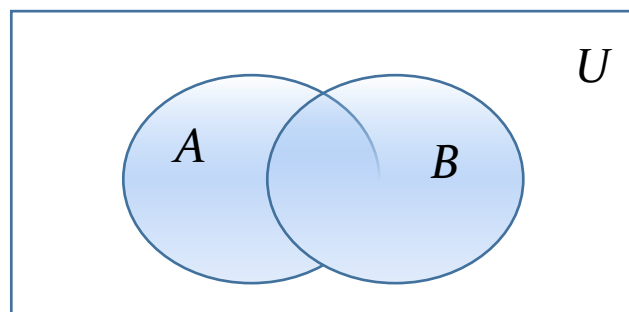
# 集合的并

---

## □ 并 (union)

□ 集合  $A$  和  $B$  的并记作  $A \cup B$ , 定义为

$$\{x | x \in A \vee x \in B\}$$



□  $\{1,2,3\} \cup \{3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$

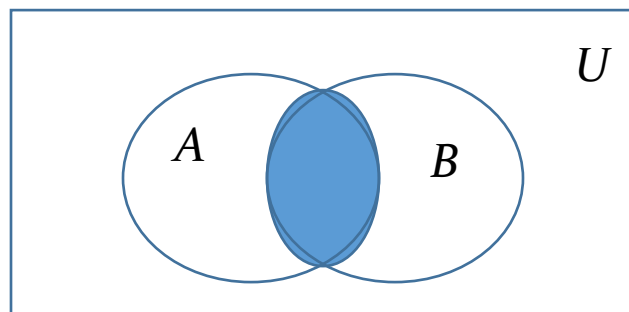
# 集合的交

---

## □ 交 (**intersection**)

□ 集合  $A$  和  $B$  的交记作  $A \cap B$ ，定义为

$$\{x | x \in A \wedge x \in B\}$$



□  $\{1,2,3\} \cap \{3,4,5\} = \{3\}$

□  $\{1,2,3\} \cap \{4,5,6\} = \emptyset$

# 广义交和并

---

□ 设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为集合

□ 广义交 (**generalized union**)

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

□ 广义并 (**generalized intersection**)

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

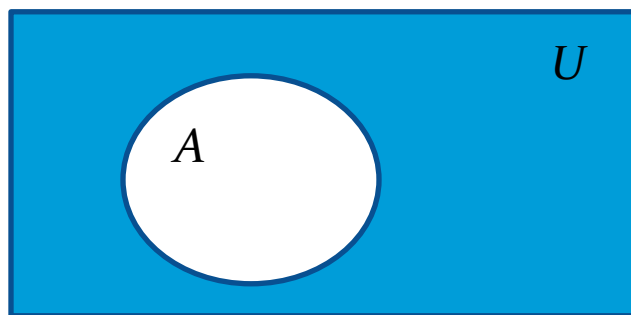
# 补集

---

## □ 补集 (complement)

□ 集合A关于全集U的补集记作  $\bar{A}$  或  $A^c$  (后者更常用), 定义为

$$\bar{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$



□ 全集为小于100的正整数, 则  $\{x \mid x > 70\}$  的补集为  $\{x \mid x \leq 70\}$

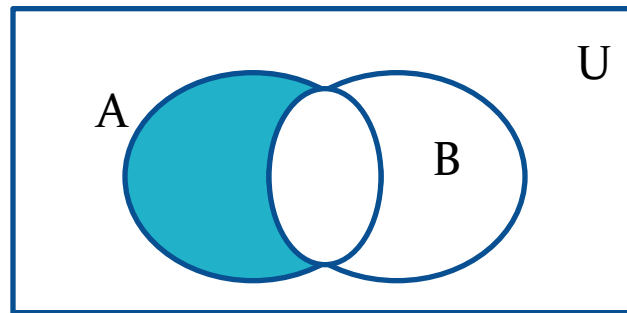
# 集合的差

---

## □ 差 (difference)

□ 集合A和B的差记作  $A-B$ ，定义为

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

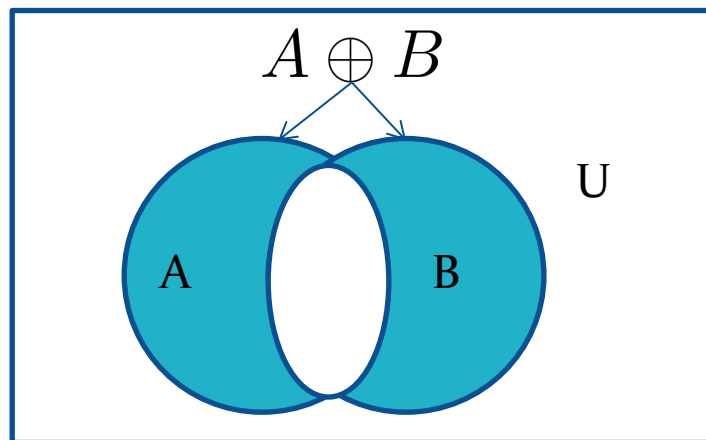


# 集合的对称差

□ 对称差 (**symmetric difference**)

□ 集合A和B的对称差记作  $A \oplus B$ ，定义为

$$(A - B) \cup (B - A)$$



□  $A = \{1,2,3,4,5\}$ ,  $B = \{4,5,6,7,8\}$

□ 则  $A \oplus B = \{1,2,3,6,7,8\}$

# 幂集

---

## □ 幂集 (power set)

□ 集合A的幂集记作  $P(A)$ ，定义为A的所有子集构成的集合

□ 若  $A = \{a,b\}$ ，则  $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

□ 若  $|A| = n$ ，则  $|P(A)| = 2^n$

# 笛卡尔积

---

## □ 笛卡尔积 (Cartesian product)

□ 集合A和B的笛卡尔积记作 $A \times B$ ，定义为

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

□  $(a, b)$  是元组 (tuple)，是有序对， $(a, b) \neq (b, a)$

□  $A = \{a, b\}$     $B = \{1, 2, 3\}$

□  $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

□  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$

# 谓词真值集

---

□ 谓词真值集 (**truth set of a predicate**)

□ 谓词P在定义域D上的真值集定义为

$$\{x \in D | P(x)\}$$

□ 若  $D = \mathbb{Z}$ ,  $P(x)$  为 “ $|x|=1$ ”

□ 则其真值集为  $\{-1,1\}$

# 例

---

□ 若全集  $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ,  
 $A = \{1,2,3,4,5\}$ ,  $B = \{4,5,6,7,8\}$

□ 求

□  $A \cup B$

□  $A \cap B$

□  $\bar{A}$

□  $A - B$

□  $B - A$

# 大纲

---

## □ 集合 (2.1-2.2)

- 集合的描述
- 集合的关系
- 集合的运算
- 集合恒等式

## □ 函数

# 集合恒等式

---

□ 恒等率 (Identity laws)

$$A \cup \emptyset = A \quad A \cap U = A$$

# 集合恒等式

---

□ 恒等率 (Identity laws)

$$A \cup \emptyset = A \quad A \cap U = A$$

□ 支配律 (Domination laws)

$$A \cup U = U \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

# 集合恒等式

---

## □ 恒等率 (Identity laws)

$$A \cup \emptyset = A \quad A \cap U = A$$

## □ 支配律 (Domination laws)

$$A \cup U = U \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

## □ 幂等律 (Idempotent laws)

$$A \cup A = A \quad A \cap A = A$$

# 集合恒等式

---

## □ 恒等率 (Identity laws)

$$A \cup \emptyset = A \quad A \cap U = A$$

## □ 支配律 (Domination laws)

$$A \cup U = U \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

## □ 幂等律 (Idempotent laws)

$$A \cup A = A \quad A \cap A = A$$

## □ 补律 (Complementation law)

$$\overline{\overline{A}} = A$$

# 集合恒等式

---

## □ 互补律 (Complement laws)

$$A \cup \bar{A} = U$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

# 集合恒等式

---

## □ 互补律 (Complement laws)

$$A \cup \bar{A} = U \qquad A \cap \bar{A} = \emptyset$$

## □ 交换律 (Commutative laws)

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

# 集合恒等式

---

## □ 互补律 (Complement laws)

$$A \cup \bar{A} = U \qquad A \cap \bar{A} = \emptyset$$

## □ 交换律 (Commutative laws)

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

## □ 结合律 (**Associative laws**)

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

# 集合恒等式

---

## □ 分配律 (Distributive laws)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

# 集合恒等式

---

## □ 分配律 (Distributive laws)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

## □ 集合恒等式的证明

□ 证明每侧都是另一侧子集

# 集合恒等式

---

## □ 分配律 (Distributive laws)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

## □ 集合恒等式的证明

□ 证明每侧都是另一侧子集

□ 使用描述法和命题逻辑

# 集合恒等式

---

## □ 分配律 (Distributive laws)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

## □ 集合恒等式的证明

□ 证明每侧都是另一侧子集

□ 使用描述法和命题逻辑

□ 使用成员表 (类似真值表)

□ 0表示x不在集合中, 1表示x在集合中

# 集合恒等式

---

## □ 分配律 (Distributive laws)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

## □ 集合恒等式的证明

- 证明每侧都是另一侧子集      冗长
- 使用描述法和命题逻辑      简洁
- 使用成员表（类似真值表）      简单

# 集合恒等式

---

## □ 分配律 (Distributive laws)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

## □ 德摩根律 (De Morgan's laws)

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

# 集合恒等式

---

## □ 分配律 (Distributive laws)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

## □ 德摩根律 (De Morgan's laws)

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

## □ 吸收律 (Absorption laws)

$$A \cup (A \cap B) = A \quad A \cap (A \cup B) = A$$

# 大纲

---

## □ 集合

## □ 函数 (2.3)

### □ 函数的定义

### □ 单射、满射和双射

### □ 函数的运算

### □ 函数图像

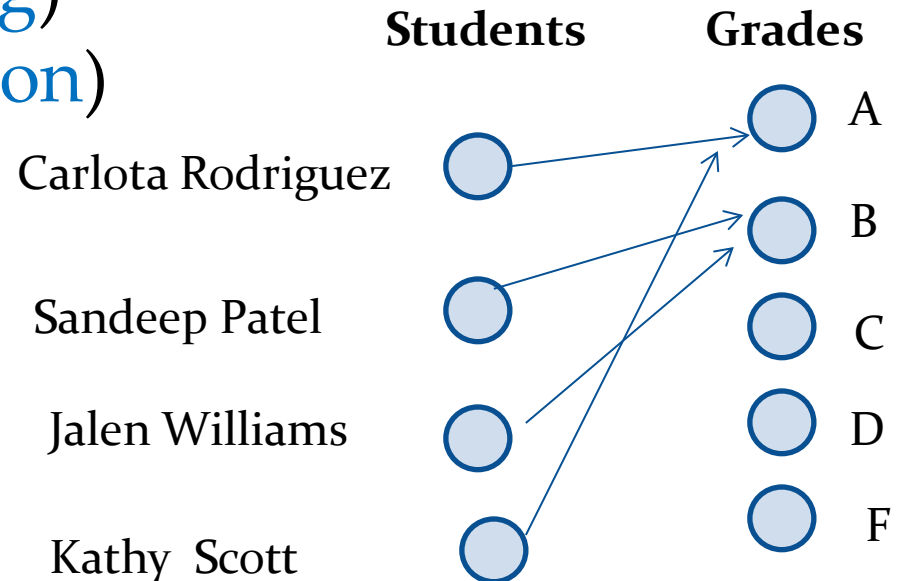
# 函数

## □ 函数 (function)

□ A和B是非空集合， A到B的函数  $f$  将A中的每个元素分配给B中的恰好一个元素

□ 记作  $f: A \rightarrow B$

□ 也称作映射 (mapping)  
或变换 (transformation)



# 函数

---

## □ 函数 (function)

- A和B是非空集合， A到B的函数  $f$  将A中的每个元素分配给B中的恰好一个元素
- A中每个元素都被映射为B中一个元素
- A中每个元素不能被映射为两个不同的元素

# 函数

---

## □ 函数 (function)

- A和B是非空集合， A到B的函数  $f$  将A中的每个元素分配给B中的恰好一个元素
- A称作定义域 (**domain**)， B称作陪域 (**codomain**)

# 函数

---

## □ 函数 (function)

- A和B是非空集合， A到B的函数  $f$  将A中的每个元素分配给B中的恰好一个元素
- A称作定义域 (domain)， B称作陪域 (codomain)
- 若  $f(a) = b$ ， 则b是a的像 (**image**)， a是b的原像 (**preimage**)

# 函数

---

## □ 函数 (function)

- A和B是非空集合， A到B的函数  $f$  将A中的每个元素分配给B中的恰好一个元素
- A称作定义域 (domain)， B称作陪域 (codomain)
- 若  $f(a) = b$ ， 则b是a的像 (image)， a是b的原像 (preimage)
- A中所有元素的像构成f的值域 (**range**)

# 函数

---

## □ 函数 (function)

- A和B是非空集合， A到B的函数  $f$  将A中的每个元素分配给B中的恰好一个元素
- A称作定义域 (domain), B称作陪域 (codomain)
- 若  $f(a) = b$ , 则b是a的像 (image), a是b的原像 (preimage)
- A中所有元素的像构成f的值域 (range)
- 两函数相等 (equal) 若定义域、陪域、映射相同

# 大纲

---

## □ 集合

## □ 函数 (2.3)

- 函数的定义

- 单射、满射和双射

- 函数的运算

- 函数图像

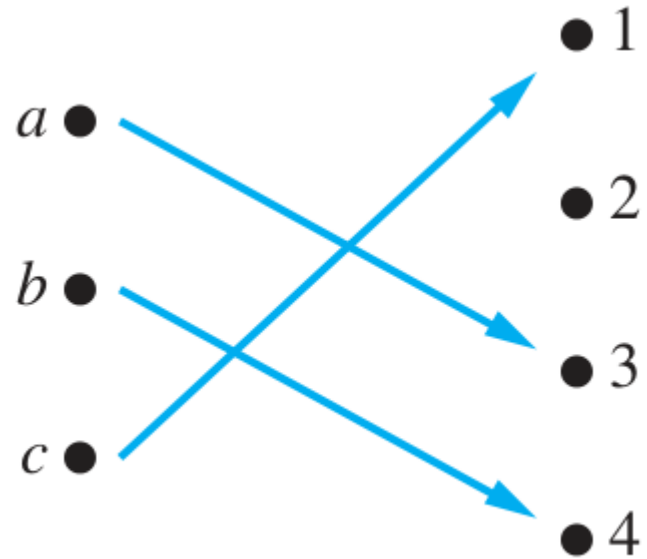
# 单射

---

## □ 单射 (**injection**)

□ 若  $f(a) = f(b)$ , 则  $a = b$

□ 也称作一对一 (one-to-one) 函数



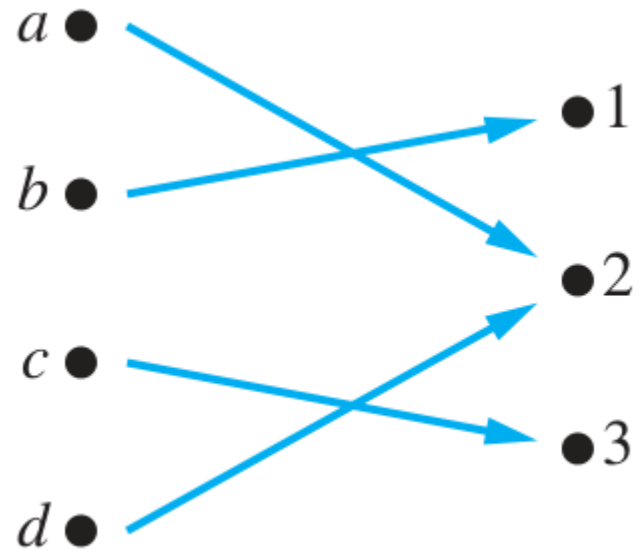
# 满射

---

## □ 满射 (**surjective**)

□ 若任意  $b \in B$ , 均有  $a \in A$ , 使得  $f(a) = b$

□ 也称作映上 (onto) 函数

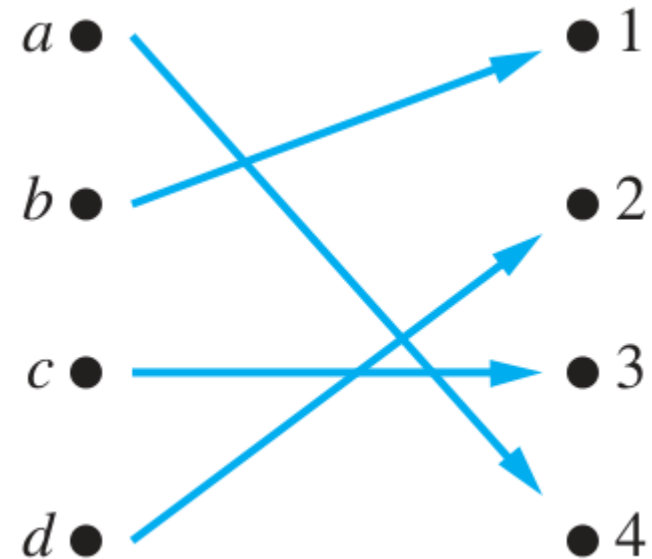


# 双射

---

□ 双射 (**bijection**)

□ 既是单射又是满射



# 大纲

---

## □ 集合

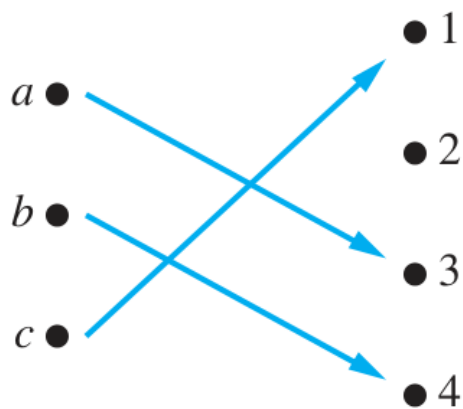
## □ 函数 (2.3)

- 函数的定义
- 单射、满射和双射
- 函数的运算
- 函数图像

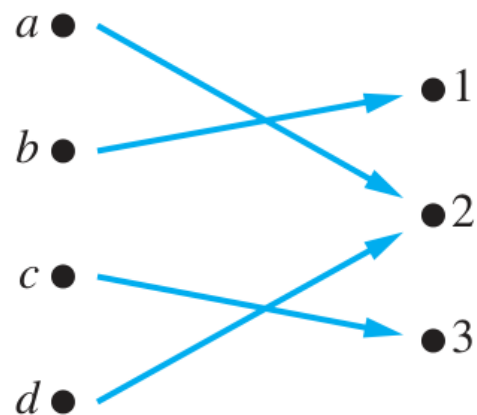
# 逆函数

## □ 逆函数 (inverse function)

□ 若 $f$ 是A到B的**双射**，且 $f(x) = y$ ，则 $f$ 的逆记作 $f^{-1}$ ，且 $f^{-1}(y) = x$



非满射， $f^{-1}(2)$ 无定义

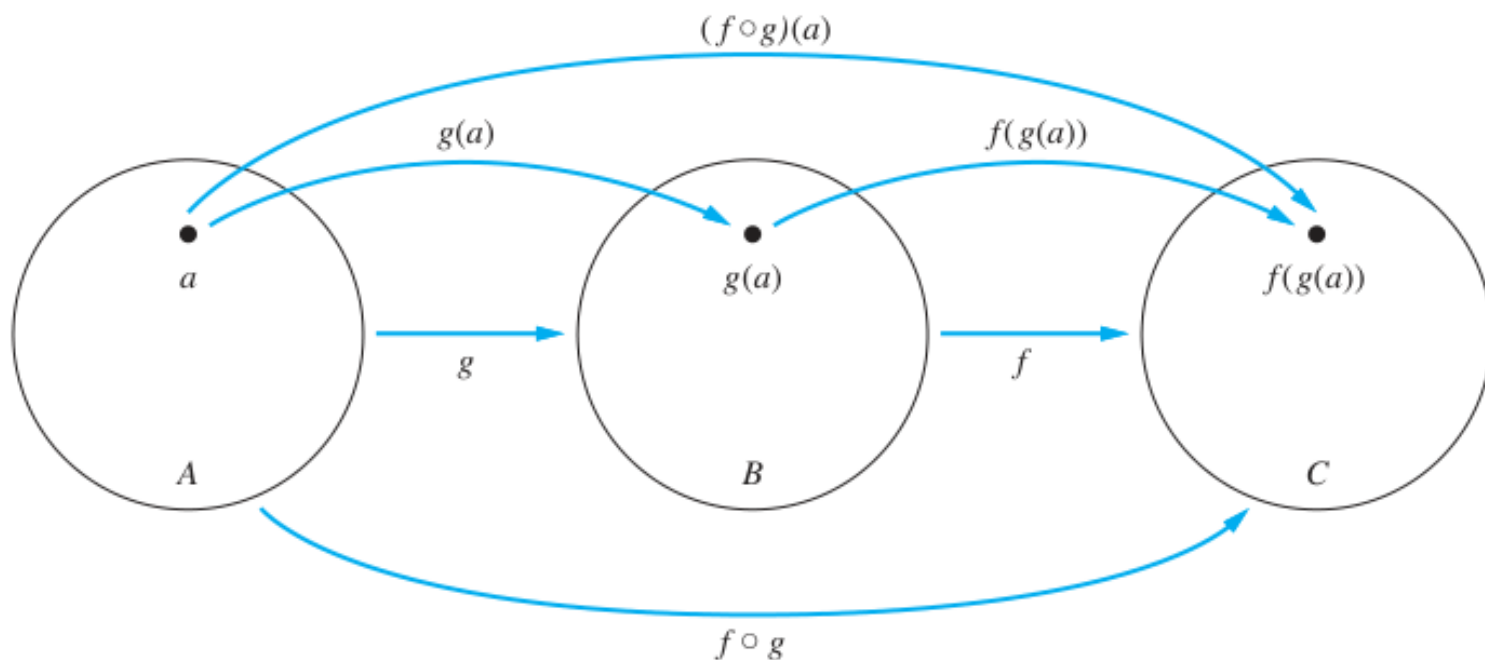


非单射， $f^{-1}(2)$ 不唯一

# 复合函数

## □ 复合 (composition)

□ 若  $g: A \rightarrow B$  且  $f: B \rightarrow C$ , 则  $f$  和  $g$  的复合记作  $f \circ g$ , 是  $A$  到  $C$  的函数, 满足  $f \circ g(x) = f(g(x))$



# 例

---

- 函数  $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  满足
  - $f(x) = 2x + 3$
  - $g(x) = 3x + 2$
  
- $f$  和  $g$  是否可逆
  
- $f \circ g$  和  $g \circ f$  是否存在

# 大纲

---

## □ 集合

## □ 函数 (2.3)

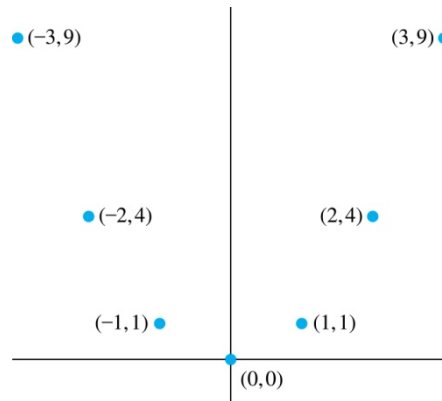
- 函数的定义
- 单射、满射和双射
- 函数的运算
- 函数图像

# 函数图像

## □ 图像 (graph)

□ 函数 $f$ 的图像是集合

$$\{(a, b) \mid a \in A \wedge f(a) = b\}$$



Graph of  $f(x) = x^2$   
from  $Z$  to  $Z$

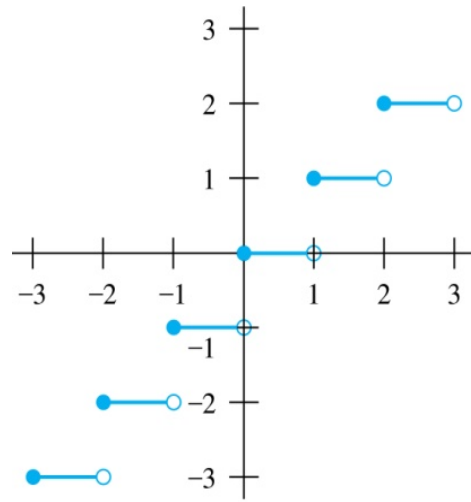
# 例：取整函数

## □ 下取整函数 (floor function)

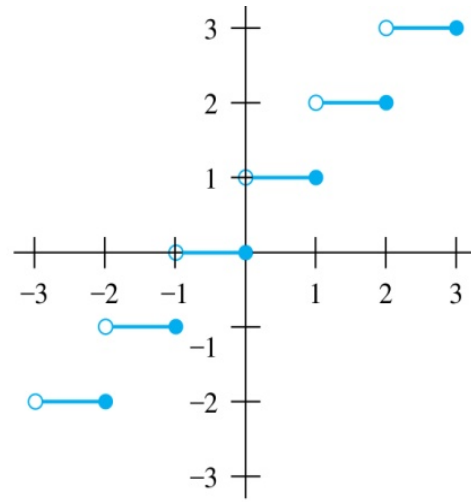
□ 不超过 $x$ 的最大整数，记作  $f(x) = \lfloor x \rfloor$

## □ 上取整函数 (ceiling function)

□ 不小于 $x$ 的最小整数，记作  $f(x) = \lceil x \rceil$



(a)  $y = \lfloor x \rfloor$



(b)  $y = \lceil x \rceil$

# 例：取整函数

---

□ 证明  $[2x] = [x] + [x + 1/2]$  对  $x \in \mathbb{R}$  成立

# 例：阶乘函数

□ 阶乘函数 (factorial function)

□  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^+, f(n) = n!$

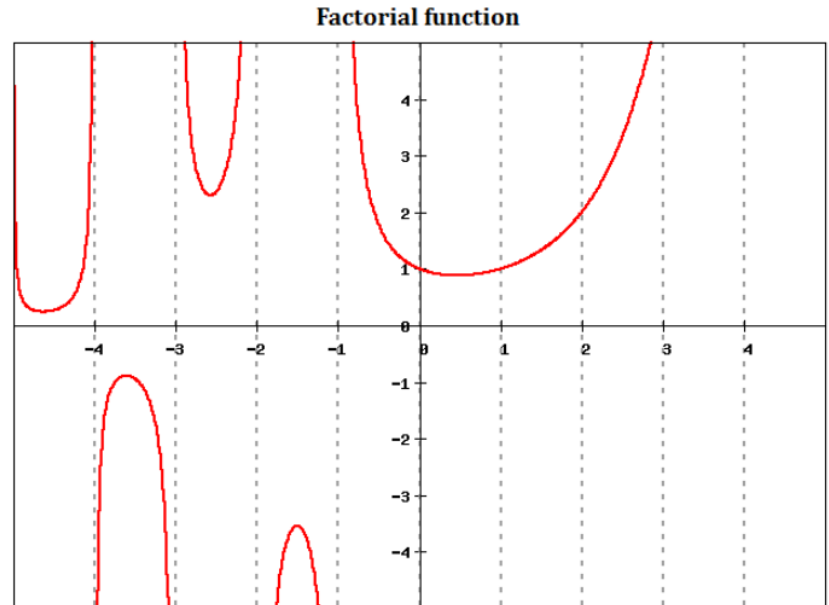
□ Stirling公式:  $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$

□ 比指数函数增长更快

□ 拓展：广义阶乘

□  $n! = \Gamma(n + 1)$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$



# 总结

---

## □ 集合的概念和运算

- 空集、全集、子集、真子集、基数、等势
- 广义并、广义交、补、差、对称差、幂集、笛卡尔积

## □ 证明集合恒等式

- 描述法 + 命题逻辑、成员表

## □ 函数

- 定义域、陪域、像、原像、值域、单射、满射、双射
- 逆、复合
- 取整函数